Differentialekvationer av högre ordning

4.1. Inledande teori: linjära ekvationer.

4.2. Reduktion av ordning.

4.6. Variation av parametrar.

BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

RANDVÄRDESPROBLEM

LINJÄRT OBEROENDE

WRONSKIAN

FUNDAMENTALLÖSNINGAR

HOMOGENA LÖSNINGAR

ALLMÄNNA LÖSNINGAR

BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

$$L(D)y = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Låt $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga på ett intervall I och låt $a_2(x) \neq 0 \quad x \quad I$. För varje godtycklig punkt $x = x_0 \quad I$ existerar en entydig lösning $y(x)$ på intervallet I.

RANDVÄRDESPROBLEM

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$y(a) = y_0, \;\; y(b) = y_1.$$

$$\boxed{L(D)y = g(x)} \quad \text{[IH]}$$

$$\boxed{L(D) = a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &L(D)\{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\} = \\ &= c_1 L(D) y_1(x) + c_2 L(D) y_2(x) \end{aligned}}$$

$$\boxed{L(D)y = 0}$$ [H]

Låt $y_1, \; y_2$ vara lösningar till [H] på ett intervall I. Då är linjärkombinationen $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ också en lösning, där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

LINJÄRT OBEROENDE

$\{f_1(x), f_2(x)\}$ är linjärt beroende på ett intervall I om det existerar konstanter c_1 och c_2, alla ej lika med noll, så att

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, x I.

Om $\{f_1(x), f_2(x)\}$ ej är linjärt beroende på intervallet I är $\{f_1(x), f_2(x)\}$ linjärt oberoende.

WRONSKIAN

Låt funktionerna $f_1(x)$ och $f_2(x)$ vara deriverbara.

Wronskideterminanten $W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$

Låt y_1 och y_2 vara lösningar till [H] på ett intervall I.

Då är $\{y_1, y_2\}$ linjärt oberoende på I

$\Leftrightarrow \; \mathrm{W}(y_1, y_2) \neq 0, \quad \mathrm{x} \quad \mathrm{I}.$

Varje $\{y_1, y_2\}$ av linjärt oberoende lösningar till [H] på ett intervall I benämnes fundamentallösningar på I.

Låt $\{y_1, y_2\}$ vara fundamentallösningar till [H] på ett intervall I.

Då är allmänna lösningen till [H] på I :

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

Låt y_p vara en godtycklig partikulärlösning till [IH] på ett intervall I och låt $\{ y_1, y_2\}$ vara fundamentallösningar till [H] på I.

Då ges allmänna lösningen till [IH] av :

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

REDUKTION AV ORDNING

$$\boxed{a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0}$$

$$\boxed{a_2(x) \neq 0}$$

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \qquad \text{[H]}$$

$$\boxed{P(x) \text{ och } Q(x) \text{ är kontinuerliga på intervallet I}}$$

y_1 är en känd icke-trivial lösning till [H].

En andra lösning till [H], y_2, sökes.

Villkor: y_1 och y_2 skall vara linjärt oberoende på I.

$\dfrac{y_2}{y_1}$ är icke-konstant på I. Sätt $y(x) = u(x)y_1(x)$.

Insättning i [H] ger :

$$Q(x)u(x)y_1(x) +$$
$$+P(x)\{u'(x)y_1(x)+u(x)y_1'(x)\}+$$
$$+\{u''(x)y_1(x)+2u'(x)y_1'(x)+u(x)y_1''(x)\}=0$$

$$u''(x)y_1(x)+u'(x)\{2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\}+$$
$$u(x)\{y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)\}=0$$

$$u''(x)y_1(x)+u'(x)\{2y_1'(x)+P(x)y_1(x)\}=0$$

Sänk ordningen: $w(x) = u'(x),\ \ w'(x) = u''(x).$

$$w'(x)y_1(x) + w(x)\{2y_1'(x) + P(x)y_1(x)\} = 0$$

Linjär av första ordningen.

$$w'(x) + w(x)\{2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + P(x)\} = 0$$

En integrerande faktor är:

$$e^{2\ln|y_1(x)| + \int P(x)dx} = y_1{}^2(x)e^{\int P(x)dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\{w(x){y_1}^2(x)e^{\int P(x)dx}\} = 0$$

$$w(x){y_1}^2(x)e^{\int P(x)dx} = C_1$$

$$w(x) = C_1{y_1}^{-2}(x)e^{-\int P(x)dx} = u'(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u(x) = \int C_1 y_1^{-2}(x) e^{-\int P(x)dx} dx + C_2 \\ &y(x) = y_1(x)\{\int C_1 y_1^{-2}(x) e^{-\int P(x)dx} dx + C_2\} = \\ &C_1 y_1(x) \int y_1^{-2}(x) e^{-\int P(x)dx} dx + C_2 y_1(x) \end{aligned}}$$

$$W(y_1, y_1 u) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 u \\ y_1' & y_1' u + y_1 u' \end{vmatrix} = y_1{}^2 u' = (C_1 = 1) = \mathrm{e}^{-\int P(x)dx} \neq 0$$

y_1 och $y_2 = y_1 u$ är linjärt oberoende och bildar en bas för lösningsrummet till [H].

Ordningen hos motsvarande inhomogena ekvation kan reduceras då en lösning till den homogena ekvationen är känd.

VARIATION AV PARAMETRAR

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)} \qquad \text{[IH]}$$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Ansätt : $y(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$.

Insättning i [IH] ger :

$$Q\{y_1 u_1 + y_2 u_2\} +$$
$$+P\{y_1' u_1 + y_1 u_1' + y_2' u_2 + y_2 \ u_2'\} +$$
$$+y_1'' u_1 + y_1' u_1' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' +$$
$$+y_2'' u_2 + y_2' u_2' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' = f$$

$$u_1\{y_1'' + Py_1' + Qy_1\} + u_2\{y_2'' + Py_2' + Qy_2\} +$$
$$+y_1' u_1' + y_2' u_2' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' +$$
$$+P\{y_1 u_1' + y_2 u_2'\} = f$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + \frac{d}{dx}\{y_1u_1' + y_2u_2'\} + P\{y_1u_1' + y_2u_2'\} = f$$

En partikulärlösning sökes.

Välj : $y_1u_1' + y_2u_2' = 0.$

Då erhålles : $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f.$

Systemet kan skrivas:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Allmänna lösningen ges av

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) u_1(x) + y_2(x)\, u_2(x)$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.